Решения первого тура, Senior Pro

№1. На доске написано положительное рациональное число. Каждую минуту Арнур заменяет написанное на доске число r на $\sqrt{r+1}$. Докажите, что когда-нибудь он получит иррациональное число.

Решение. Предположим, что Арнур бесконечно будет получать положительные рациональные числа. Если в какой то момент записано $\frac{p}{q}$ с $(p,q)=1$, то на следующем шаге будет $\sqrt{\frac{p+q}{q}}$, где $(p+q,q)=1$, но чтобы это было рациональным, q должно быть квадратом целого числа. То есть знаменатель самого первого рационального числа должен быть 2^n-ой степенью какого что натурального числа для любого натурального n, что возможно только если этот знаменатель равен 1. То есть число в начале натуральное, но корень из натурального числа равен либо натуральному либо иррациональному числу, откуда у нас должна быть бесконечная цепочка натуральных чисел. Но мы знаем, что $r > \sqrt{r+1}$ для $r > 1$, а также, если очередное число равно 1, то следующее $\sqrt{2}$ - иррациональное, откуда получаем, что последовательность уменьшается, но, предположению, она всегда > 0. Противоречие.

№2. Сумма 100 чисел равна 0, сумма их модулей равна 1000. Найдите наименьшее значение разности между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

Ответ. 20.

Решение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ - положительные из этих чисел, а $y_1, y_2, \ldots, y_{100-m}$ - модули остальных, тогда $x_1+\ldots+x_m = y_1+\ldots+y_{100-m} = 500$. Тогда пусть, без ограничения общности, x_1 - наибольший из x, а y_1 - наибольший из y. Тогда значение в условии равно $x_1 + y_1$. Но $x_1 + y_1 \geq 500(\frac{1}{m} + \frac{1}{100-m}) \geq 500 \cdot \frac{4}{100} = 20$. Примером служит $\underbrace{-10, -10, -10, \ldots, -10}_{50 \text{ раз}}, \underbrace{10, 10, 10, \ldots, 10}_{50 \text{ раз}}$.

№3. Глеб поиграл в новую, набирающую популярность ритм-игру "Uso!". Карта состоит из последовательности нот, которые нужно вовремя нажать - то есть, нажав очередную ноту, Глеб мог "попасть"и "промазать". Счет игрока определяется максимальным комбо, то есть максимальным количеством нот, в которые Глеб попал подряд. Пытаясь разобраться в правилах, все, что Глеб запомнил - это то, что всего он нажал 2023 ноты и попал в 1987 из них. Найдите наименьший счет, который Глеб мог получить.

Ответ. 54.

Решение. Пусть n - наименьший счет, который мог получиться. Тогда между поделим 1987 с остатком на $n-1$ и будем записывать каждый отрезок из $n-1$ подряд идущих в нашу строку с результатами нажатий, как попавшие. Тогда несложно понять, что, если ставить между каждыми двумя отрезками хотя бы одну промазанную, то в общем выйдет > 2023 (иначе так расположить возможно). То есть $1987 + \lceil \frac{1987}{n-1} \rceil - 1 > 2023$, то есть $\lceil \frac{1987}{n-1} \rceil > 37$. То есть $n \leq 54$. Но делая те же рассуждения для того, что $\lceil \frac{1987}{n} \rceil \leq 37$, получаем, что $n \geq 54$. То есть $n = 54$.

№4. Найдите наибольшее количество слонов, которых можно поставить на шахматной доске размеров 2048×2024 так, чтобы никакие два не били друг друга. *Напоминаем, что слон бьет все клетки находящиеся на одной диагонали с ним!*

Ответ. 4070.

Решение. *Оценка.* Докажем, что для произвольной доски $2m \times 2n$, ответ не больше $2m + 2n - 2$. Заведем на доске координаты: столбцы слева направо, начиная с 1 - y координаты, строки сверху вниз, начиная с 1 - x координаты. Есть два типа диагоналей: для первого $x + y = c$, где $2 \leq c \leq 2n + 2m$, для второго $x - y = c$, где $1 - 2n \leq c \leq 2m - 1$. Во первых, всего на доске $2m + 2n - 1$ диагоналей (1 или 2 типа), откуда всего слонов не более $2m + 2n - 1$. Теперь предположим, что удалось так расставить $2m + 2n - 1$ слона, тогда в каждой диагонали каждого типа стоит ровно один слон. Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{2m+2n-1}, y_{2m+2n-1})$ - координаты слонов, тогда если просуммировать $x_i + y_i$, то выйдет $2 + 3 + \ldots + (2n + 2m) = (n + m + 1)(2n + 2m - 1) \equiv n + m + 1 \pmod 2$, а если суммировать $x_i - y_i$, то выйдет $-(2n - 1) + \ldots + (2m - 1) = (2m + 2n - 1)(n - m) \equiv n - m \equiv n + m \pmod 2$. Но мы знаем, что $x + y \equiv x - y \pmod 2$, откуда эти суммы должны быть равны $\pmod 2$, но это не так, откуда всего $\leq 2n + 2m - 2$ слонов.

Пример. Повернем доску, чтобы она стала 2024×2048. Раскрасим первый и последний столбцы, потом будем красить клетки с координатами $(1012, 1014), (1013, 1014), (1012, 1016), (1013, 1016) \ldots, (1012, 1034), (1013, 1034)$. Всего $2024 + 2024 + 11 \cdot 2 = 4070$ слонов.

№5. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Предположим, что существует некоторая прямая l, параллельная BD и касающаяся вписанных окружностей треугольников ABC, CDA. Покажите, что l проходит через центр вписанной окружности BCD или DAB.

Решение. Мы рассмотрим внешнюю касательную ℓ, которая ближе к C, и докажем, что если $\ell \parallel BD$, то ℓ проходит через центр BCD. Пусть I_1, I_2 - центры окружностей вписанных в ABC и ADC. Пересечем ℓ с AC в точке R. Тогда $RI_1 \parallel$ одной из биссектрис угла между диагоналями (так как $\ell \parallel BC$), а $RI_2 \parallel$ другой. Рассмотрим теперь I - центр окружности вписанной в BCD. Пусть I_1I пересекает AC и BD в точках X и Y, соответственно. $BCII_1$ - вписанный с центром в точке середины дуги BC (по Лемме о трезубце, например). Тогда, если $AC \cap BD = S$. $\angle XYS = \frac{\angle ABC + \angle BCD}{2} = \angle YXS$ (из вписанности и счета углов). То есть выходит, что $XY \parallel$ внешней биссектрисе угла BSC, то есть RI_1 проходит через I. Аналогично, RI_2 проходит через I, и, так как они не совпадают, $R = I \in \ell$, что и требовалось.

№6. Дано натуральное число. Разрешается расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить $12345 + 6 + 789 = 13140$). С полученным числом снова разрешается выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций

Решение. Хватит четырёх операций. Для чисел, меньших 1000, это очевидно. Иначе разобьём число на четырёхзначные куски (не начинающиеся с нуля) плюс, возможно, нули, плюс, возможно, одно меньшее число в конце (например, $12300004500060 = 1230 + 0 + 0 + 0 + 4500 + 0 + 60$). Если получилось k четырёхзначных кусков, то сумма не меньше 1000k. Будем теперь по одному заменять ненулевые слагаемые на сумму их цифр. В конце она будет не больше $36k + 27 < 100k$. Значит, количество разрядов в сумме уменьшится. Но так как на каждом шаге сумма уменьшалась меньше чем на 9999, то последняя сумма перед уменьшением количества разрядов выглядела так: $10\ldots0abcd$. Эту сумму можно получить при одной операции. Далее достаточно трижды заменить число на сумму его цифр.

Решения второго тура, Senior Pro

№1. Дано 100 различных натуральных чисел. Они разбиты на 50 пар так, что сумма чисел в каждой паре больше 1000. Докажите, что если выписать все 100 чисел в порядке возрастания, то сумма 50-го и 51-го чисел тоже окажется больше 1000.

Решение. Если бы это было неверно, то каждое из чисел с 1-го по 50-е было бы в паре с каким-то числом, стоящим после 51-го. Это невозможно, так как там только 49 чисел.

№2. На шахматной доске выбрана клетка. Сумма квадратов расстояний от её центра до центров всех чёрных клеток обозначена через a, а до центров всех белых клеток – через b. Докажите, что $a = b$.

Решение. Докажем, что для любой точки точки плоскости, суммы расстояний от нее до пар противоположных вершин прямоугольника равны. Пусть $A(0,0)$, $B(0,b)$, $C(a,b)$, $D(a,0)$ - вершины прямоугольника, $O(x,y)$ - точка плоскости, тогда $OA^2+OC^2 = x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2 = x^2+(y-b)^2+y^2+(x-a)^2 = OB^2+OC^2$. Теперь разделим доску на квадраты 2×2. Используя доказанное утверждение для каждого квадрата, получаем требуемое.

№3. Пусть PA и PB — касательные к окружности, проведенной из C. Выберите точку K на AB. Предположим, что описанная окружность треугольника PBK снова пересекает C в точке T. Пусть P' — точка симметричная P относительно A. Докажите, что $\angle PBT = \angle P'KA$.

Решение. Нам нужно доказать, что $AT \parallel PK$, и поскольку A — это середина PP', нам нужно доказать, что AT проходит через середину PK, поэтому теперь пусть AT пересекает PK в L, тогда $\angle LKT = \angle PBT = \angle TAK \Rightarrow LK^2 = LT\cdot LA$, аналогично, $LP^2 = LT\cdot LA$, а значит $LP = LK$, что и требовалось.

№4. На клетчатую плоскость положили 2023 одинаковых квадратов, стороны которых идут по сторонам клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечётным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше, чем клеток в одном квадрате.

Решение. Назовём наши квадраты плитками. Разобьём плоскость на решетку из квадратов размером с плитку линиями, идущими по границам клеток. У каждой клетки теперь есть координаты: номер столбца (считая от левого края квадрата) и номер строки, (считая от нижнего края). Заметим, что все клетки, накрытые плиткой, имеют разные координаты. Выберем любую пару координат, и в каждой накрытой клетке с этими координатами напишем число покрывающих её плиток. Сумма этих чисел равна числу плиток, то есть 2023. Хотя бы одно слагаемое нечётно. Это верно для каждой пары координат, а число пар равно числу клеток в плитке.

№5. Даны положительные числа $a_1,\ldots,a_n$ такие, что $a_1^2+2a_2^3+\ldots na_n^{n+1}<1$. Докажите, что $2a_1+3a_2^2+\ldots+(n+1)a_n^n<3$.

Решение. $ia_i^{i+1}+\frac{1}{2^{i+1}} = \underbrace{a_i^{i+1}+\ldots+a_i^{i+1}}_{i\text{ раз}}+\frac{1}{2^{i+1}} \overset{\textbf{AM-GM}}{\geq} \frac{(i+1)a_i^i}{2}$. Значит $2a_1+3a_2^2+\ldots+(n+1)a_n^n \leq 2a_1^2+4a_2^3+\ldots 2na_n^{n+1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n} < 2\cdot 1+1 = 3$.

№6. Пусть a и b — натуральные числа такие, что $a!+b!$ делит $a!b!$. Докажите, что $3a \geq 2b+2$.

Решение. Очевидно, $a,b\geq 2$, поэтому случай $a\geq b$ тривиален. Рассмотрим случай $a<b$, тогда $1+\frac{b!}{a!}|b!$. Предположим противное и скажем $3a<2b+2$ или $3a\leq 2b+1$. Итак, мы рассматриваем

$N = (a+1)(a+2)\cdots b+1$. Основное утверждение состоит в том, что все простые числа, делящие N, больше $\frac{b}{2}$.

Пусть $p|N$. Поскольку $(a+1)\cdots b$ — это произведение $b-a$ последовательных чисел,$p \geq b-a+1$. Теперь, если $\frac{a+1}{2} \leq p < \frac{b}{2}$, то p является делителем $N-1$, поэтому $p \nmid N$. Также $\frac{a+1}{2} \leq b-a+1$. А значит никакое простое число $b-a+1 \leq p < \frac{b}{2}$ не может делить N. А значит, если $p|N$, то мы должны иметь $p > \frac{b}{2}$. Кроме того, как $N|b!$, $p \leq b$. Заметим также, что $p \leq a$, поскольку для всех $a+1 \leq p \leq b$ $p|N-1$.

Так как $v_p(b!) \leq 1$ для любого простого числа $p > \dfrac{b}{2}$, получаем

$$N \leq \prod_{\frac{b}{2}<p\leq a} p \leq a^{a-\frac{b}{2}}$$

. С другой стороны,

$$N > (a+1)(a+2)...b \geq a^{\frac{b-a}{2}} \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{b-a}{2}}$$

, откуда $a \leq (\dfrac{a+b}{2})^{b-a} < a^{3a-2b} \leq a$, противоречие.

Решения третьего тура, Senior Pro

№1. Диас показал Аксултану 37 внешне одинаковых карточек, выложенных в ряд. Он сказал, что на закрытых сторонах карточек записаны все числа от 1 до 37 (каждое по одному разу) так, что число на любой карточке начиная со второй является делителем суммы чисел, написанных на всех предшествующих карточках. Затем Диас показал Аксултану, что на первой карточке написано число 37, а на второй — число 1. Аксултан сказал, что он тогда знает, какое число написано на третьей карточке. Какое?

Ответ. 2.

Решение. Сумма всех чисел, кроме последнего, делится на последнее число, значит, сумма всех чисел также делится на последнее число. Сумма всех чисел от 1 до 37 равна $19 \cdot 37$. Значит, последнее число равно 1, 19 или 37. Так как 1 и 37 стоят на первом и втором местах, последнее число — 19. Третье число — делитель числа $37 + 1 = 38$, то есть оно равно 1, 2 или 19. Мы знаем, что числа 1 и 19 расположены не на третьем месте, поэтому на третьем месте стоит число 2.

№2. BD – биссектриса треугольника ABC. Точка E выбрана так, что $\angle EAB = \angle ACB$, $AE = DC$, и при этом отрезок ED пересекается с отрезком AB в точке K. Докажите, что $KE = KD$.

Решение. Пусть X и Y – проекции на прямую AB точек E и D соответственно, а Z – проекция точки D на прямую BC. Точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от его сторон, поэтому $DY = DZ$. С другой стороны, из равенства прямоугольных треугольников AXE и CZD (по гипотенузе и острому углу) следует, что $DZ = EX$. Значит, $DY = EX$. Поэтому прямоугольные треугольники KDY и KEX равны по катету и противолежащему острому углу. Следовательно, $KE = KD$.

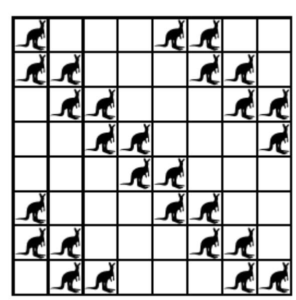
№3. Натуральные числа a и b больше 1. Известно, что числа $a^2 + b$ и $a + b^2$ простые. Докажите, что числа $ab + 1$ и $a + b$ взаимнопростые.

Решение. Будем решать задачу от противного. Предположим, что числа $ab+1$ и $a+b$ имеют общий простой делитель p. Тогда произведение $(a^2+b)(b^2+a) = a^2b^2+ab+a^3+b^3 = ab(ab+1)+(a+b)(a^2ab+b^2)$ тоже делится на p. Но поскольку $p \leq a+b < min(a^2+b, b^2+a)$, число р является собственным делителем какого-то из чисел $a^2 + b$ или $a + b^2$, что противоречит их простоте.

№4. Шахматная фигура кенгуру бьет 8 клеток, которые расположены от нее на две или три клетки левее, правее, выше или ниже (а соседние клетки не бьет). Какое наибольшее число не бьющих друг друга кенгуру можно расставить на доске 8×8?

Ответ. 27.

Решение. Докажем, что больше 27 не бьющих друг друга кенгуру расставить нельзя. Для этого заметим, что в полоске 1×5 кенгуру могут стоять либо рядом, либо на противоположных концах полоски и, в любом случае, их не больше двух. Рассмотрим далее квадрат 3×3. В паре клеток, помеченных одинаковыми цифрами, может стоять лишь один кенгуру. Поэтому в квадрате 3×3 их не более пяти. Разрежем теперь доску 8×8 на один квадрат 3×3 и 11 полосок 1×5. По доказанному на доске не более чем $5 + 11 \cdot 2 = 27$ кенгуру. *Примером* служит картинка справа.



№5. В каждой точке (m, n) с натуральными координатами записано натуральное число, не превосходящее mn. Докажите, что какое то число будет встречаться хотя бы 2023 раза.

Решение. Рассмотрим точки, для которых произведение их координат $\leq k$. В i-ом столбце их $\lfloor \frac{k}{i} \rfloor > \frac{k}{i} - 1$, откуда всего их $> k(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} - 1)$, но *гармонический ряд* расходится, откуда выходит, что значение в скобке можно сделать достаточно большим (> 2023), но тогда среди записанных чисел будет то, которое записано более 2023 раз.

№6. Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его **сторон** BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Пусть B_2 и C_2 — середины отрезков BB_1 и CC_1, соответственно. Прямая B_2C_2 пересекает прямую BC в точке W. Докажите, что $AW = A_1W$.

Решение. Пусть вписанная окружность, противолежащая A, пересекает AB и AC в точках T и U соответственно, пусть M_1 и M_2 обозначают середины AT и AU соответственно,

Утверждение 1: M_1, M_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

Доказательство. Коллинеарность M_1, M_2, B_2 доказывается аналогично коллинеарности M_1, M_2, C_2, поэтому докажем только последнее. Пусть M_1M_2 пересекает CC_1 в точке X, тогда по теореме Менелая, $\frac{AM_1}{CM_1} \cdot \frac{C_1X}{CX} \cdot \frac{C_1M_2}{AM_2} = 1$, но $C_1M_2 = CM_1$ (легко посчитать по отрезкам касательных) и $AM_2 = AM_1$, откуда $XC_! = XC$, следовательно, $X = C_2$ и, следовательно, утверждение.

Легко проверить, что у точек M_1 и M_2 одинаковая *степень точки* относительно окружности нулевого радиуса с центом A и вневписанной противолежащей A. А значит M_1M_2 - радикальная ось этих окружностей, откуда выходит, что $WA^2 = WA_1^2$, как степени точки W относительно двух упомянутых ранее окружностей.

Решения четвертого тура, Senior Pro

№1. Есть 40 гирек массой 1 г, 2 г, ..., 40 г. Из них выбрали 10 гирь чётной массы и положили на левую чашу весов. Затем выбрали 10 гирь нечётной массы и положили на правую чашу весов. Весы оказались в равновесии. Докажите, что на какой-нибудь чаше есть две гири с разностью масс в 20 г.

Решение. Разобьём гирьки на пары с разностью 20 г: (1, 21), (2, 22), ..., (20, 40). Если на весах лежит ровно по одной гирьке из каждой пары, то (независимо от выбора гирек в парах) вес нечётной чаши делится на 20, а вес чётной не делится. Противоречие.

№2. Для конечного множества целых чисел C определим $S(C)$ как сумму элементов C. Найдите два непустых множества A и B, пересечение которых пусто, объединением которых является множество $X = \{1, 2, \dots, 2021\}$ и такие, что произведение $S(A)S(B)$ — полный квадрат.

Решение. Выберем $A = \{1, 2023, 2, 2022, \dots 59, 1965, 1012\}$, а B, соответственно, как $X \setminus A$. В таком случае, $S(A) = 59 \cdot 2024 + 1012 = 1012 \cdot 119 = 1012 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 1$. А $S(B) = \frac{2023 \cdot 2024}{2} - S(A) = 17 \cdot 17 \cdot 7 \cdot 1012 - S(A) = 1012 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 16$. Откуда произведение квадрат.

№3. Дан четырёхугольник $ABCD$. На стороне AD взяты произвольные точки P,Q, такие что $BP \parallel CQ$. M,N - середины отрезков BP и CQ, соответственно. K - точка пересечения AN и DM. Докажите, что площадь треугольника MNK не зависит от выбора P,Q.

Решение. Пусть $AC \cap BD = S$. Пусть R - точка на AD такая, что $BP \parallel SR \parallel CQ$, тогда по замечательному свойству трапеции, AN и DM проходят через середину отрезка SR, тогда это и есть K. Мы знаем, что $S_{AKD} = \frac{S_{ASD}}{2}$ (из за медианы и того, что медиана делит площадь пополам). $S_{NKM} = S_{AKD} \cdot \frac{NK}{KA} \cdot \frac{KM}{MD}$ (из формулы через синус), но отношения фиксированы и равны $\frac{BS}{SA}$ и $\frac{CS}{SD}$, откуда и следует утверждение.

№4. Докажите, что при $x, y \geq \frac{1}{2}$ выполняется неравенство $x^2y^2 + 2(x + y) \geq 4xy + 1$.

Решение. $x = \frac{1}{2} + a$, $y = \frac{1}{2} + b$, где $a, b \geq 0$. Неравенство перепишется в виде $(\frac{1}{2} + a)(\frac{1}{2} + b) \geq 2\sqrt{ab}$, но $LHS \overset{\textbf{C-S}}{\geq} (\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}})^2 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \sqrt{ab} \geq 2\sqrt{ab}$, что и требовалось.

№5. В университете УН mn коридоров, каждый из которых соединяет какую то пару кабинетов. Администрации университета удалось прикрпеить каждый коридор к одному из m департаментов так, что коридоры одного департамента не имеют общего кабинета на концах (то есть все кабинеты на концах различны). Докажите, что это же задание можно было сделать так, чтобы к каждому департаменту было прикреплено n коридоров.

Решение. Пусть в какой то момент департаменту a принадлежит больше коридоров, чем департаменту b, тогда рассмотрим все коридоры департаментов a или b. Мы знаем, что из каждого кабинета выходит не более двух коридоров, но тогда несложно проверить, что если перенести эту ситуацию в граф, то он состоит из циклов и путей, в которых соседние коридоры покрашены в разные цвета. В любом цикле будет одинаковое количество a и b, а в путях, возможно, на один больше какого то из них. Так как всего больше у a, то существует путь, в котором у a на 1 больше чем у b. Возьмем такой путь и перекрасим b в a, а a в b, очевидно, что условие, что из одной вершины не выходят два одного цвета - выполнено и мы увеличили количество b на 1, а a уменьшили на 1. Теперь понятно, что если есть департамент с количеством большим чем n в какой то момент, то есть департамент с количеством меньшим, тогда проводим вышеописанную операцию с ними. Это уменьшит сумму модулей разностей от чисел до n, а она всегда неотрицательна, поэтому в какой то момент все числа равны n.

№6. Мирон выбрал произвольную перестановку p чисел от 0 до $n-1$. За один вопрос Назар может спросить у Мирона значение выражения (p_x, p_y) для каких-то $1 \leq x < y \leq n$, где (a, b) - НОД чисел a, b, и получить ответ мгновенно. Как Назару за $2n$ вопросов сказать Мирону две позиции i, j такие, что на одной из них точно стоит 0, независимо от того как Мирон переставил числа изначально.

Решение. Будем обозначать вопрос, как пару чисел (x, y). Начнем с пары $(1, 2)$ и запишем на бумаге пару чисел $(\textit{ответ}, 2)$. Далее, следуем следующему алгоритму:

Пусть мы спросили (l, r) до этого, а на бумаге записана пара (x, r_1).

Если $r = n$, то утверждается, что можно ответить (l, r_1).

i) Двигаем правую границу и спрашиваем ответ на $(l, r+1)$

ii) Если ответ больше, чем то, что записано на бумаге, то стираем то, что на бумаге, а потом пишем пару $(\textit{ответ на новый}, r+1)$.

iii) Если ответ равен тому, что написано, то мы двигаем левую границу на r_1 и спрашиваем ответ на $(r_1, r+1)$. После этого запишем пару $(\textit{ответ}, r+1)$.

Заметим, что мы спрашиваем вопрос только после движения какой то из границ и один в начале. Так как мы двигаем только два конца, то всего вопросов будет не больше $n-2+n-2+1 = 2n-3$.

Теперь докажем алгоритм. Нам важны следующие факты о 0, во первых, $(x, 0) \geq (x, y)$ для любого неотрицательного y, а также, что $(0, x) \neq (0, y)$ для любых ненулевых $x \neq y$. Заметим, что во втором числе пары на бумаге находится кандидат на то, чтобы быть нулем (мы меняем его каждый раз, когда есть число, которое вместе с левой границей дает большее число). А также левый конец является кандидатом (мы меняем его каждый раз когда вместе с левой границей появляется одинаковое число). То есть в любой момент левый конец и второе число в паре - кандидаты на то, чтобы быть нулями. Тогда, если мы правым концом дошли до конца, то среди НОДов $(l, r_1), (l, r_1+1), \ldots, (l, n)$ наибольшим является (l, r_1), тогда среди $r_1+1, \ldots, n$ нет 0, значит 0 либо в l либо в r_1. Заметим, что мы спрашиваем вопрос только после движения какой то из границ и один в начале. Так как мы двигаем только два конца, то всего вопросов будет не больше $n-2+n-2+1 = 2n-3$.

Решения финального тура, Senior Pro

№1. Найдите все точные квадраты вида $\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ цифр}}5$, где n - натуральное.

Ответ. 25, 225.

Решение. $\underbrace{22\ldots2}_{n+1\text{ цифр}}5 = \frac{2(10^{n+1}-1)}{9}\times10+5 = \frac{20\times10^{n+1}-20+45}{9} = \frac{2\times10^{n+2}+25}{9} = \frac{25}{9}(8\times10^n+1)$, следовательно, $8\times10^n+1$ — точный квадрат. Пусть $8\times10^n+1 = k^2$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда $2^{n+3}\times5^n = k^2-1 = (k-1)(k+1)$. Так как $\gcd(k+1,k-1) = 1/2$, то $5^n|k-1$ или $5^n|k+1$, что неверно, когда $n\geq5$. Подставляя $n = 0,1,2,3$, получаем только $N = 25$ и $N = 225$.

№2. Пусть a,b,c - разные ненулевые числа, что $a+b+c = -abc$ и $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = 2$. Найдите $\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}$.
Ответ. 3.
Решение. $a+b+c = -abc \Rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} = -1 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0$ $\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2} = \frac{ab}{c}(-\frac{1}{a}-\frac{1}{b})+\frac{bc}{a}(-\frac{1}{b}-\frac{1}{c})+\frac{ca}{b}(-\frac{1}{c}-\frac{1}{a}) = -\frac{a+b}{c}-\frac{b+c}{a}-\frac{c+a}{b} = 3-(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = 3$.

№3. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB\parallel CD$, а $AC\perp BD$. Докажите, что $AD\cdot BC\geq AB\cdot CD$.

Решение. Пусть M - середина AD, N - середина BC, $O = AC\cap BD$, тогда $\frac{BC+AD}{2} = ON+OM\geq MN = \frac{AB+CD}{2}$, тогда $BC^2+2BC\cdot AD+AD^2\geq AB^2+2AB\cdot CD+CD^2$, но $BC^2+AD^2 = AB^2+CD^2$ (из за критерия перпендикулярности), откуда следует требуемое.

№4. Найдите значение выражения $2C_{2023}^2+4C_{2023}^4+\ldots+2022C_{2023}^{2022}$. *Напоминаем, что C_n^k - количество способов выбрать $0\leq k\leq n$ элементов из множества из n различных элементов, не учитывая порядок.*
Ответ. $2023\cdot2^{2021}$.
Решение. Заметим, что $2i\cdot C_{2023}^{2i} = 2023\cdot C_{2022}^{2i-1}$ (расписать по базовой формуле) , тогда наша сумма равна $2023(C_{2022}1+C_{2022}3+\ldots+C_{2022}2021) = 2023\cdot2^{2021}$. Рассмотрим бином Ньютона $(x+1)^{2022} = C_{2022}^0x^{2022}+C_{2022}^1x^{2021}+\ldots C_{2022}^{2022}$, тогда подставим $x=-1$ и выйдут числа в искомой сумме со знаком минус, откуда перенеся на другую часть, получаем, что сумма всех C_{2022}^{2i} равна сумме всех C_{2022}^{2i-1}, откуда выходит, что они оба равны 2^{2021}, так как общая сумма равна значению бинома в точке $x = 1$ - 2^{2022}.

№5. Положительные числа a,b,c таковы, что $\frac{3a}{b+c}\geq\frac{2b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$. Докажите, что тогда $\frac{3\sqrt{a}}{b+c}\geq\frac{2\sqrt{b}}{a+c}+\frac{\sqrt{c}}{b+a}$.

Решение. прибавим 3 к обоим частям изначального и поделим на скобки, как $3(\frac{a}{b+c}+1)\geq2(\frac{b}{a+c}+1)+(\frac{c}{a+b}+1)$, далее можем перенести в числитель и поделить на $a+b+c$ в каждой скобке , тогда $\frac{3}{b+c}\geq\frac{2}{a+c}+\frac{1}{a+b}$. Перемножив с предыдущим и применив КБШ, выйдет $\frac{9a}{b+c}\geq(\frac{2\sqrt{b}}{a+c}+\frac{\sqrt{c}}{a+b})^2$, а это то, что нужно.

№6. У Тимки есть 10000 каштанов 100 различных размеров в карамне - по 100 каждого размера. Каждую минуту Тимка наугад достает один каштан из кармана. Он хочет в какой то момент разбить те каштаны, которые он уже достал, на тройки так, чтобы какой то размер был в каждой тройке и ни одна тройка не содержала двух каштанов одного размера. Докажите, что не позже чем через 300 минут он все таки смог сделать это.

Решение. Назовем размер максимальным, если на данный момент он встречается наибольшее число раз среди всех каштанов, которые достал Тимка.

Лемма. Пусть в какой то момент у нас лежат $3n$ каштанов и максимального размера у нас ровно n. Тогда распределим каштаны по кругу по часовой стрелке. Круг состоит из n кучек. После того, как заполнили максимальным, продолжаем заполнять остальные и мы не пройдем доп круг, чтобы положить два одинакового размера в одну кучу. То есть в этом случае так расположить можно.

Теперь рассмотрим следующую величину: разницу утроенного количества шариков максмального цвета минус количество всех. Заметим, что это > 0 на первом ходу. А за 300 минут оно станет ≤ 0, потому что всего может быть не больше 100 максимального цвета. То есть в какой то промежуточный момент эта величина была равна 0, но тогда можно применить лемму.

№7. Докажите, что $n^7 + 7$ не является полным квадратом ни при каком натуральном n.

Решение. Прибавляем к обеим частям 121, получая $n^7 + 2^7 = k^2 + 11^2$. Заметим, что $n \equiv 1 \pmod 4$, так как если $2|n$, то $4|k^2 + 1$, что является противоречием, а если $n \equiv 3 \pmod 4$, то $k^2 + 1 \equiv 3 \pmod 4$. Пусть $p|n + 2$. Тогда $p|n^7 + 2^7 \implies p|k^2 + 11^2$. Но поскольку $n \equiv 1 \pmod 4$, $n + 2 \equiv 3 \pmod 4$, то существует простой делитель $n + 2$ p такой, что $p \equiv 3\ pmod 4$ и $2 \nmid v_p(n + 2)$. Тогда из $p|k^2 + 11^2$ следует противоречие, если только не $p = 11$ и $11|k$. Но в этом случае $k \equiv 0 \mod 11$, тогда $11^2|n^7 + 2^7$, тогда, по LTE выходит, что $v_{11}(n^7 + 2^7) = v_{11}(n + 2)$, а значит $n + 2$ делится на 11^3 (так как степень вхождения нечетная) и тогда $11|(\frac{k}{11})^2 + 1$ - противоречие.

№8. Пять точек A, B, C, D и E лежат на окружности ω в таком порядке по часовой стрелке так, что $AB \parallel CE$ и $\angle ABC > 90^\circ$. Пусть k — окружность, касающаяся AD, CE и ω такая, что k и ω касаются дуги DE, не содержащей A, B и C. Пусть $F \neq A$ — пересечение ω и касательной к k, проходящей через A, отличную от AD. Докажите, что существует окружность, касающаяся BD, BF, CE и ω.

Решение. *Лемма 1.* Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. $(I), (J)$ — окружности вписанные в треугольники ADC, BDC соответственно. Докажите, что существует их общая касательная параллельная AB.

Пусть общая касательная $(I), (J)$ пересекает AD, BC в точках F, E. Тогда EF, IJ, CD пересекаются в точке K. Посчитаем углы: $\angle DIC = 90 + \frac{1}{2}\angle DAC = 90 + \frac{1}{2}\angle DBC = \angle DJC \Rightarrow DIJC$ - вписанный $\Rightarrow \angle IDC = \angle JCD - \angle IKD \Rightarrow \angle FDC = \angle ECD - \angle EKD = \angle CEK \Rightarrow CDEF$ - вписанный. Таким образом, $EF \parallel AB$.

Вернемся к решению, пусть ω_1 - окружность, которую требуют в условии, тогда докажем, что общая касательная к ω_1 и $\omega \parallel AB$, откуда будет следовать утверждение. Пусть $(I), (J)$ - окружности вписанные в ADF и BDF, соответственно. Пусть (I) касается AD, AF в точках X_1, Y_1. Из теории *полувписанных окружностей*, мы знаем, что центр ω - I_1 , которая является полувписанной для треугольника ADF, удовлетворяет соотношению $AI_1 = \frac{AI}{\cos^2 \angle \frac{DAF}{2}}$. Но тогда, доказывая аналогичное утверждение для ω_1, выходит $\frac{AI}{AI_1} = \frac{AJ}{AJ_1}$, тогда, по лемме, существует прямая ℓ_1 параллельная DF, касающаяся $(I), (J)$, рассмотрим прямую, которая получается из ℓ_1 гомотетией в точке A, которая переводит (I) в ω, тогда полученная прямая касается ω и $\parallel AB$, но мы знаем, что если сделать тоже самое с точкой B и другими окружностями, то получится та же прямая (из за того, что равный коэффициент и центры гомотетии лежат на прямой параллельной той прямой, которую мы двигаем), тогда общая касательная параллельна AB, что и требовалось.